

Title	級数ノCesaro-Summationニ関スル一問題
Author(s)	泉, 信一
Citation	全国紙上数学談話会. 3 p.1-p.2
Issue Date	1934-07-28
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73844
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

9. 級数 / Cesàro - Summation = 関スル一問題

泉信一 (東北帝大理學部)

推測定理. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が (C, r) -summable ナルヲメ、必要且十分ノ條件ハ

$$a_n = A_n^{(\alpha)} \Delta^\alpha b_n \quad (\alpha > 0)$$

ヲ満足スル数列 (b_n) ノウチ、 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が $(C, r-\alpha)$ -summable ナルモノノ存在スル事ヲアル。茲ニ

$$A_n^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha}{n}$$

及ビ、

$$\Delta^\alpha b_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{(-\alpha-1)} b_{n+\nu}.$$

此ノ定理ニ於テ $\alpha=1$ トスレバ Hardy - Littlewood ノ定理ニナル、從ツテ此ノ定理ハ Hardy - Littlewood ノ定理ノ拡張ニナル。

コノ定理ノ十分ノ事ハ次ノ様ニシテ二項級数ニ関スル不等式ヲ證明スル事ニ導カレリ、必要ノ事ハ同様ノ問題トモウ一ツ難シイ問題ニ出會フ、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ノ } r \text{ 次ノ Cesàro Sum } \text{ヲ } S_n^{(r)} \text{ トシ、 } c_n^{(r)} = \frac{S_n^{(r)}}{A_n^{(r-1)}} \text{ トス。 } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ カ}$$

ヲ同様ニ $T_n^{(r)}$ 及ビ $d_n^{(r)}$ ヲ定義スル、然レバ、 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{(r-1)} = 0$ ナル事カラ

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{(r)} = 0$ ナル事ヲ證明出來ルニ良イ、

$$\begin{aligned} \text{定義カラ} \quad c_n^{(r)} &= \frac{S_n^{(r)}}{A_n^{(r)}} = \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{(r)} a_\nu \\ &= \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{(r)} A_\nu^{(\alpha)} \Delta^\alpha b_\nu \\ &= \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{(r)} A_\nu^{(\alpha)} \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(-\alpha-1)} b_{\nu+\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{n+\nu}^{(r)} A_{\nu}^{(s)} \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu}^{(-s-1)} \sum_{\lambda=0}^{\mu} A_{\mu+\nu-\lambda}^{(-r+d-1)} \frac{d_{\lambda}^{(r-d)}}{A_{\lambda}^{(r-d)}} \quad 2, \\
&= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda} d_{\lambda}^{(r-d)}, \text{ say.}
\end{aligned}$$

故 = Toeplitz / 定理カラ

$$1^{\circ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n\lambda} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots)$$

$$2^{\circ} \quad \sum_{\lambda=1}^{\infty} |a_{n\lambda}| < M \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ナル事ヲ證明出來レバ良ク、此ノニツノ條件ノウチ 1° ハ容易ニ證明出來ルガ 2° ハ出來ナカッタ。

此ノ問題ニ関シテハ Hardy - Littlewood, Math. Zeits., 19 (1922); Andersen Proc. London Math. Soc., 27 (1927); Winn, Journal London Math. Soc., 7 (1932), 参照。

更ニ此ノ種ノ問題ヲ解クトキニ役立ツニ項係数ノ不等式及計算ニ就テハ

Zygmund, Bull. de Cracovie, 1927; Winn, Proc. Edinburgh Math. Soc., 4 (1932) 参照。